

**Goethe-Universität  
Frankfurt am Main  
Physikalisches Institut  
Anfängerpraktikum  
Teil 1**



**Versuchsname:** Mathematisches Pendel

**Themengebiet:** Einführungsversuch

**Versuchsnummer:** E1

**Studiengang:** \_\_\_\_\_

**PG-Nummer:** ---

**Praktikant\*in:** \_\_\_\_\_

**Assistent\*in:** \_\_\_\_\_

**Versuchsdurchführung am:** \_\_\_\_\_

**Protokoll bestanden:** \_\_\_\_\_

## 1. Einleitung

In diesem Versuch soll die Erdbeschleunigung  $g$  mithilfe eines mathematischen Pendels bestimmt werden. Der Einfluss des Auslenkwinkels auf die Periodendauer wird untersucht.

## 2. Physikalische Grundlagen

Das Mathematische Pendel ist eine Idealisierung des Physikalischen Pendels und kann nur in Näherung realisiert werden. Es besteht aus einem Massepunkt und einer masselosen reibungsfreien Aufhängung [1]. Eine mögliche Realisierung ist ein Fadenpendel mit einem Faden der Länge  $l$ , an dem eine kugelförmige Masse  $m$  hängt (siehe Abb. 1). Nach einer Auslenkung um den Winkel  $\varphi$  vollführt dieses Pendel Schwingungen um seine Ruhelage. Auf den Körper wirkt die Gewichtskraft  $F = m \cdot g$ . Man zerlegt sie in eine Komponente in Richtung des Fadens (diese wird vom Faden aufgefangen) und in eine Komponente senkrecht dazu (siehe Abb. 1). Dies ist eine rücktreibende Kraft, die eine Beschleunigung längs der kreisförmigen Pendelbahn erzeugt. Mit der Newtonschen Grundgleichung ergibt sich damit

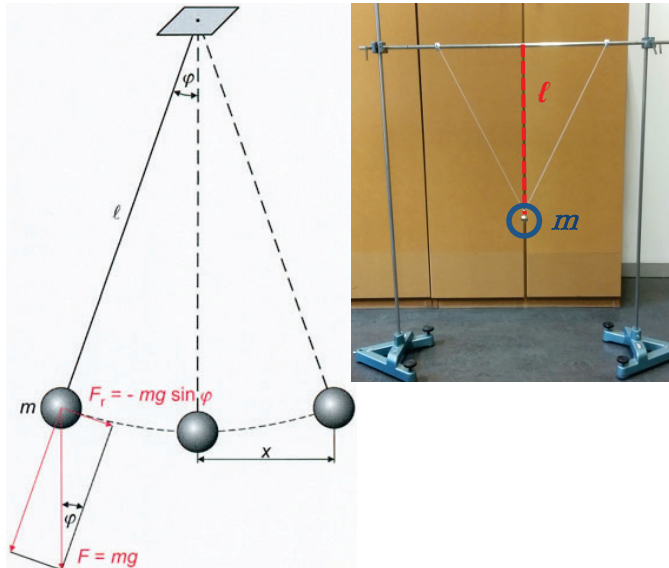


Abb. 1: Links: Schematische Darstellung des Fadenpendels [1]. Rechts: Experimenteller Aufbau.

(1)  $\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin \varphi = 0$  mit  $\omega = \sqrt{g/l}$ .

Dabei ist  $\omega$  die Kreisfrequenz der Schwingung. Für kleine Amplituden (kleine Auslenkwinkel, mit  $\sin \varphi \approx \varphi$ ) wird daraus die Schwingungsgleichung eines harmonischen Oszillators mit der Kreisfrequenz  $\omega$ , die unabhängig von der Maximalamplitude  $\varphi_0$  ist [1]:

$$(2) \quad \ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0 \text{ und daraus } \varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega \cdot t + \alpha) \text{ mit } \alpha \dots \text{Phasenverschiebung.}$$

Damit folgt aus der Schwingungsdauer  $T = 2\pi / \omega = 2\pi \sqrt{l/g}$  direkt die Erdbeschleunigung:

$$(3) \quad g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}.$$

Falls die Bedingung  $\sin \varphi \approx \varphi$  nicht erfüllt ist, wird die Periodendauer abhängig von  $\varphi_0$  [2]

$$(4) \quad T_{\text{Korr}} = 2\pi \sqrt{l/g} \cdot \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} + \frac{9}{64} \sin^4 \frac{\varphi_0}{2} + \dots \right).$$

Wenn man nur Terme berücksichtigt, die maximal quadratisch in  $\sin \varphi_0$  sind, erhält man

$$(5) \quad g = \frac{4\pi^2 l}{T^2} \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\varphi_0}{2} \right).$$

Damit ist der systematische Fehler für  $\varphi_0 = 10^\circ$  nahezu vernachlässigbar ( $< 0.4\%$ ). Der Fehler wird bei großen Auslenkwinkeln jedoch recht erheblich.

### 3. Durchführung und Messwerte

Die Messung der Periodendauer wird mit der Stoppuhr eines Smartphones durchgeführt. Die Anfangs- und Endzeit wird jeweils im Nulldurchgang der Schwingung bestimmt. Die Messung der Fadenlänge erfolgt mit einem Stahlmaßstab. Gemessen wird der senkrechte Abstand zwischen Aufhängung der Kugelmasse und Pendelaufhängung,  $l_{\text{mess}}$ .

Zur Bestimmung des Mittelwertes ( $\bar{x}$ ), der Standardabweichung der Einzelmessung ( $\sigma$ ) und der Standardabweichung des Mittelwertes ( $m$ ) werden folgende Formeln verwendet [1]:

$$(6) \quad \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \quad m = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Es werden drei verschiedene Messreihen aufgenommen. Zwei mit verschiedenen Fadenlängen und eine dritte, wo der Auslenkwinkel deutlich erhöht wird, so dass die Kleinwinkelnäherung nicht mehr anwendbar ist.

**Tabelle 1: Messwerte der Periodendauer für die kurze Fadenlänge**

Messung der Periodendauer	$10 \cdot T_i$ (s)	$T_i$ (s)	$(T_i - \bar{T})$ (s)	$(T_i - \bar{T})^2$ (s <sup>2</sup> )
1				
2				
3				
4				
5				
Zwischensumme	XXX		XXX	
Mittelwert $\bar{T}$				
Standardabweichung Einzel $\sigma_T$				
Standardabweichung MW $m_T$				

**Tabelle 2: Messwerte der kurzen Fadenlänge**

Messung der Fadenlänge	$l_i$ (m)
1	
2	
3	
4	
5	
Mittelwert $\bar{l}$	
Standardabweichung Einzel $\sigma_l$	
Standardabweichung MW $m_l$	

Tabelle 3: Messwerte der Periodendauer für die lange Fadenlänge

Messung der Periodendauer	$10 \cdot T_i$ (s)	$T_i$ (s)	$(T_i - \bar{T})$ (s)	$(T_i - \bar{T})^2$ (s <sup>2</sup> )
1				
2				
3				
4				
5				
Zwischensumme	XXX		XXX	
Mittelwert $\bar{T}$				
Standardabweichung Einzel $\sigma_T$				
Standardabweichung MW $m_T$				

Tabelle 4: Messwerte der langen Fadenlänge

Messung der Fadenlänge	$l_i$ (m)
1	
2	
3	
4	
5	
Mittelwert $\bar{l}$	
Standardabweichung Einzel $\sigma_l$	
Standardabweichung MW $m_l$	

Tabelle 5: Messwerte der Periodendauer für die lange Fadenlänge mit großem Auslenkwinkel

Messung der Periodendauer	$5 \cdot T_i$ (s)	$T_i$ (s)
1		
2		
3		
4		
5		
Zwischensumme	XXX	
Mittelwert $\bar{T}$		

#### 4. Auswertung und Fehlerrechnung

Die Erdbeschleunigung ergibt sich nach Formel (3) für die 2 Messreihen mit kleinem Auslenkwinkel und dem jeweiligen Mittelwert der Periodendauer und der Fadenlänge.

$$\bar{g}_1 = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \bar{g}_2 = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{Einheiten nicht vergessen!})$$

Für die dritte Messreihe mit der großen Anfangsamplitude ergibt sich die Erdbeschleunigung nach Formel (5). Schätzen Sie dafür einen ungefähren Wert für  $\varphi_0$ .

$$\bar{g}_{3,\text{korr}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Berechnen Sie die Erdbeschleunigung nach Formel (3) auch für die dritte Messreihe.

$$\bar{g}_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Die **Fehlerrechnung** wird nur für  $g_1$  und  $g_2$  durchgeführt.

Der Fehler von  $l$  ergibt sich aus dem systematischen Fehler des Maßstabs  $\Delta l_{\text{sys}}$  und dem zufälligen Fehler  $\Delta l_{\text{zuf}}$  aus der Messreihe. Für den Maßstab gilt:  $\Delta l_{\text{sys}} = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{l}$ .

Der zufällige Fehler ergibt sich aus der doppelten Standardabweichung des Mittelwertes,

$$(7) \quad \Delta l_{\text{zuf}} = 2 \cdot m_l = \frac{2 \cdot \sigma_l}{\sqrt{5}}.$$

$$(8) \quad \Delta l_1 = \Delta l_{\text{sys}} + \Delta l_{\text{zuf}} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \Delta l_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Der systematische Fehler der Stoppuhr eines typischen Smartphones liegt bei etwa  $\Delta T_{\text{sys}} = 10 \cdot 10^{-3} \text{ s} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot \bar{T}$ , der zufällige Fehler  $\Delta T_{\text{zuf}}$  ergibt sich analog zu  $\Delta l_{\text{zuf}}$ :

$$(9) \quad \Delta T_1 = \Delta T_{\text{sys}} + \Delta T_{\text{zuf}} = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \Delta T_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Da die beiden Messgrößen  $l$  und  $T$  in voneinander unabhängigen Messreihen ermittelt wurden, pflanzen sie sich nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz von Gauss fort.

$$(10) \quad \Delta g = \sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial l} \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial T} \Delta T\right)^2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

(keine Zahlenwerte einsetzen!)

Durch Umformungen erhält man den relativen Fehler

$$(11) \quad \frac{\Delta g}{g} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (\text{Formel vereinfachen!})$$

Wenn man die Werte in Formel (11) einsetzt erhält man (Einheiten beachten!):

$$\text{Relativer Fehler: } \frac{\Delta g_1}{g_1} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Relativer Fehler: } \frac{\Delta g_2}{g_2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Und daraus mit dem berechneten Wert für  $\bar{g}$  den

$$\text{Absoluter Fehler: } \Delta g_1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\text{Absoluter Fehler: } \Delta g_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

## 5. Diskussion und Fazit

In diesem Versuch wurde die Erdbeschleunigung mithilfe eines Fadenpendels bestimmt. Dazu wurden die Periodendauern für zwei verschiedene Fadenlängen ermittelt.

$$\underline{\underline{g_1 = (\bar{g}_1 \pm \Delta g_1) =}} \quad (\text{Einheiten nicht vergessen und richtig runden!})$$

$$\underline{\underline{g_2 = (\bar{g}_2 \pm \Delta g_2) =}} \quad (\text{Einheiten nicht vergessen und richtig runden!})$$

Berechnung des gewichteten Mittelwertes  $\bar{g}$  aus diesen beiden Werten, allgemein gilt:

$$(12) \quad \bar{S} = \frac{s_1 S_1 + s_2 S_2 + s_3 S_3 + \dots}{s_1 + s_2 + s_3 + \dots} = \frac{\sum_i s_i S_i}{\sum_i s_i} \quad \text{mit } s_i = \frac{1}{(\Delta S_i)^2}$$

Der Fehler zu dem gewichteten Mittelwert  $\Delta \bar{S}$  berechnet sich dann nach:

$$(13) \quad \Delta \bar{S} = \frac{1}{\sqrt{s_1 + s_2 + s_3 + \dots}} = \left( \sum_i s_i \right)^{-1/2}$$

$$\underline{\underline{\bar{g} = (\bar{g} \pm \Delta \bar{g}) =}} \quad (\text{Einheiten nicht vergessen und richtig runden!})$$

Vergleich mit Literaturwert aus [3]  $g_{\text{Lit}} = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Diskussion: enthalten die Messwerte mit Fehlerbereich den Literaturwert, wenn nicht, was sind mögliche Fehlerquellen, die nicht berücksichtigt wurden, etc.

---



---



---



---

Diskutieren Sie Ihr Ergebnis der dritten Messreihe, mit großem Auslenkwinkel. Wie unterscheiden sich die Ergebnisse der Erdbeschleunigung, wenn Sie einen ersten Korrekturterm der Kleinwinkelnäherung berücksichtigen:

---



---



---

Allgemeines Fazit des Versuches:

---



---

## 6. Quellenverzeichnis

- [1] H. J. Eichler, H.-D. Kronfeldt, J. Sahn, *Das Neue Physikalische Grundpraktikum*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2001.
- [2] C. Gerthsen, *Physik*, Springer Verlag (2010).
- [3] H. Kuchling, *Taschenbuch der Physik, 21. Auflage*, Fachbuchverlag Leipzig, 2014.

# Checkliste für Praktikumsprotokolle im AP1

Uni Frankfurt, Fachbereich Physik AP1, Stand 04-2023

<b>1. Titelblatt, Einleitung</b>		ok?
1.1	Wurde das vorgegebene Titelblatt verwendet?	<input type="checkbox"/>
1.2	Gibt es einen einleitenden Satz, der den wesentlichen Inhalt des Versuchs zusammenfasst?	<input type="checkbox"/>
<b>2. Physikalische Grundlagen</b>		
2.1	Sind die physikalischen Grundlagen des Versuchs kurz beschrieben (Quellen richtig angegeben)?	<input type="checkbox"/>
2.2	Sind alle Formeln vorhanden, die zur Auswertung benötigt werden?	<input type="checkbox"/>
2.3	Sind alle Größen eindeutig definiert?	<input type="checkbox"/>
2.4	Sind alle Formeln nummeriert und gut lesbar? Achtung: Malpunkt verwenden, z.B. über Tastenkombination für Malpunkt: <b>Alt 0183</b> (am einfachsten mit Ziffernblock, wenn vorhanden).	<input type="checkbox"/>
<b>3. Durchführung und Messwerte</b>		
3.1	Ist der Versuchsaufbau beschrieben?	<input type="checkbox"/>
3.2	Wenn möglich sollte vom Versuch eine Skizze oder ein Foto vom Aufbau dargestellt sein! Ein Foto vom Aufbau kann/soll mit dem Handy gemacht werden!	<input type="checkbox"/>
3.3	Wurde die eigene Durchführung des Versuchs beschrieben, und evtl. aufgetretene Besonderheiten/Probleme?	<input type="checkbox"/>
3.4	Sind alle Messwerte enthalten?	<input type="checkbox"/>
<b>4. Auswertung und Fehlerrechnung</b>		
4.1	Daten die in Graphiken gezeigt werden, nicht noch einmal in Tabelle wiederholen!	<input type="checkbox"/>
4.2	Wurde angegeben wie die Auswertung vorgenommen wurde, bzw. welche Formel an welcher Stelle verwendet wurde?	<input type="checkbox"/>
4.3	Wurden alle Einheiten richtig angegeben?	<input type="checkbox"/>
4.4	Wurde eine Fehlerrechnung wie in der Aufgabenstellung gefordert durchgeführt?	<input type="checkbox"/>
4.5	Wurden alle Aufgaben der Aufgabenstellung vollständig bearbeitet?	<input type="checkbox"/>
<b>5. Diskussion und Fazit</b>		
5.1	Ist eine explizite Angabe der Ergebnisse mit Fehler erfolgt?	<input type="checkbox"/>
5.2	Wurde das Ergebnis und der Fehler am Ende richtig gerundet und dabei die signifikanten Stellen richtig beachtet?	<input type="checkbox"/>
5.3	Ist ein Vergleich der Messwerte mit Fehler mit den entsprechenden Literaturwerten erfolgt? Wurde dabei die Quelle des Literaturwertes angegeben?	<input type="checkbox"/>
5.4	Wurden mögliche Ursachen für Abweichungen diskutiert, z.B. systematische Fehler der Messung?	<input type="checkbox"/>
5.5	Ist ein allgemeines Fazit erfolgt?	<input type="checkbox"/>
<b>6. Allgemeines</b>		
6.0	Enthält das Protokoll die Abschnitte: <i>0. Titelblatt, 1. Einleitung, 2. Physikalische Grundlagen, 3. Durchführung und Messwerte, 4. Auswertung und Fehlerrechnung, 5. Diskussion und Fazit, 6. Quellenverzeichnis</i> in dieser Reihenfolge?	<input type="checkbox"/>
6.1	Wurde die Rechtschreibung und Grammatik überprüft?	<input type="checkbox"/>
6.2	Ist die Qualität der Abbildungen in der abgegebenen pdf-Datei in Ordnung, hat jede Abbildung eine nummerierte Bildunterschrift?	<input type="checkbox"/>
6.3	Haben alle Tabellen eine nummerierte Tabellenüberschrift?	<input type="checkbox"/>
6.4	Wurden die Quellenangaben für Inhalt und Bilder richtig vorgenommen? Bei Bild oder Textstelle fortlaufende Nummer [1], [2],... im Text bzw. in der Bildunterschrift angeben. Am Ende des Protokolls (nicht als Fußnote!) werden alle Quellen aufgelistet, z.B. als [1] Praktikumsanleitung M2, Physikalisches Institut, Uni Frankfurt (2019).	<input type="checkbox"/>
6.5	Wurde am Ende des Protokolls die Checkliste eingefügt?	<input type="checkbox"/>